

## 電子光科学 I

次の[I-1]から[I-8]の8問についてそれぞれ別の答案用紙に答えよ。なお、各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合は、「[I-1]（2枚目）」などのように明記せよ。

[I-1]

以下の微分方程式を解け。

(配点 15 点)

(1)  $\frac{dy}{dx} + xy = 0$

(2)  $\frac{dy}{dx} + xy = x \exp(-x^2)$

(3)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

[I-2]

以下の問に答えよ。ただし、 $z = x + iy$ 、 $i$ は虚数単位とする。

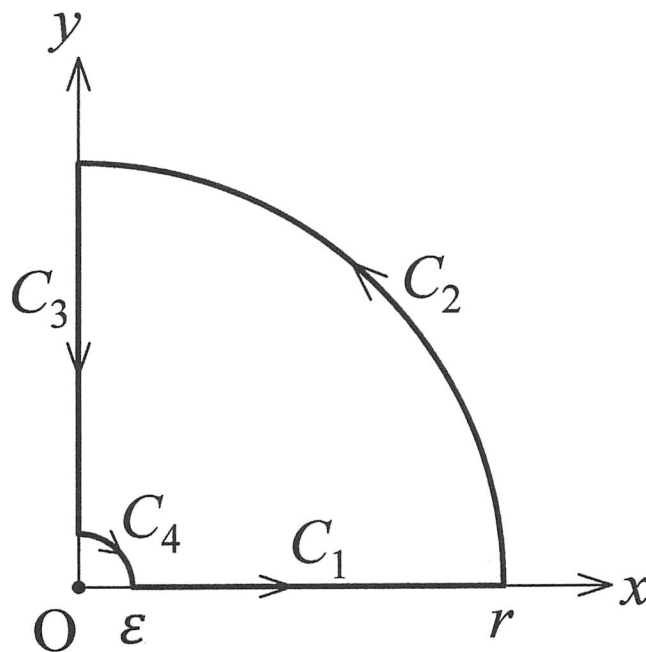
(配点 15 点)

(1) 次の複素関数の特異点での留数を求めよ。

$$f(z) = \frac{\exp(iz^2)}{z}$$

(2) 問(1)の $f(z)$ を下図の積分路で積分することによって、次の実関数の定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$$

の値を求めよ。ただし図の点 $O$ は原点、 $C_2, C_4$ はそれぞれ半径 $r, \varepsilon$ の $1/4$ 円周である。

[I-3]

$xy$ 平面上の原点を通る直線 $l$ に対する折り返し（鏡映）変換  $f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  は、行列 $A$ を用いて

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  と表現できる。以下の問に答えよ。 (配点 15点)

- (1) 直線 $l$ が $x$ 軸上にある場合と $y$ 軸上にある場合を考える。行列 $A$ をそれぞれの場合について答えよ。
- (2) 直線 $l$ が $y = ax$  の場合を考える。行列 $A$ の固有値 $1$ と $-1$ に対する固有ベクトルをそれぞれ答えよ。
- (3) 問(2)の場合における行列 $A$ を求めよ。

[I-4]

 $N$ 点の離散フーリエ変換を

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

とする。ここで、 $W_N = e^{-2\pi i/N}$ 、 $i$ は虚数単位である。 $N$ が偶数のとき、 $X[k]$ と $X\left[k + \frac{N}{2}\right]$ を $\frac{N}{2}$ 点の離散フーリエ変換で表す式を導出せよ。ただし、 $k < \frac{N}{2}$ とする。 (配点 15 点)

[I-5]

事象 $F$ の生起確率を $P(F)$ 、確率変数 $X$ の平均を $E[X]$ 、分散を $V[X]$ として、以下の問に答えよ。

(配点 15 点)

- (1) 非負の実数値の有限集合 $A$ 上の確率変数 $X$ と、任意の  $a > 0$  に対して、以下の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

- (2) 実数値の有限集合 $B$ 上の確率変数 $X$ と、任意の  $b > 0$  に対して、以下の不等式が成り立つことを示せ。ただし、問(1)の不等式を用いてもよい。

$$P(|X - E[X]| \geq b) \leq \frac{V[X]}{b^2}$$

[I-6]

以下の問に答えよ。

(配点 25 点)

$xyz$  座標系において、図 1 のように、中心が  $(0, h, 0)$  を通り  $z$  軸に平行に置かれた半径  $a$  の無限に長い円柱内に、電荷が単位長さあたり  $\lambda (> 0)$  で一様に分布している。ここで、 $a$  は  $h$  に比べて十分小さく、円柱断面内においても電荷分布は一様であるとする。また、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とせよ。

- (1)  $x$  軸上の電場ベクトル  $\mathbf{E}$  を  $x$  の関数として求めよ。
- (2) 円柱内に蓄積される、 $z$  方向の単位長さあたりの静電エネルギーを求めよ。

次に、図 1 において  $y < 0$  の領域を完全導体で満たした、図 2 のような場合を考える。ここでも、円柱断面内の電荷分布は一様で変わらないとせよ。

- (3)  $x$  軸上の電荷密度分布  $\sigma$  を  $x$  の関数として求めよ。
- (4) 原点  $O$  に対する円柱表面の点  $(0, h-a, 0)$  の電位を求めよ。
- (5) 円柱外の空間に蓄積される、 $z$  方向の単位長さあたりの静電エネルギーを求めよ。

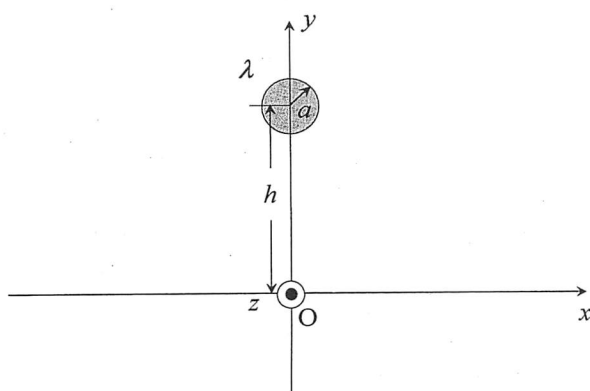


図 1

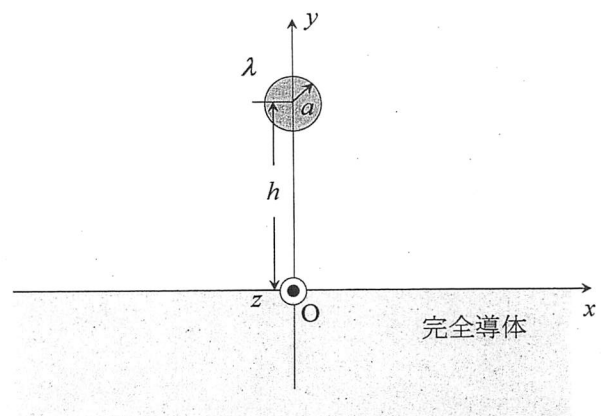


図 2

[I-7]

以下の問に答えよ。

(配点 25 点)

図1に示すように、左右対称な形状の導線ABCDに電流*I*が矢印の向きに流れている。点Pは線分ABと線分DCの延長線上の交点にあり、点Pから線分BCに下ろした垂線が線分BCと交わる点をQとする。また、AB間、BP間、PC間、CD間の長さは全て*L*、∠BPQと∠QPCの角度をαとする。電流が点Pに作る磁場について考える。

- (1) AB間を流れる電流*I*が点Pに作る磁場の大きさ $H_{AB}$ 、およびCD間を流れる電流*I*が点Pに作る磁場の大きさ $H_{CD}$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 図2は図1の拡大図である。BC上の点をRとし、∠QPRの角度をθとする。点R上の電流素片  $I ds$  が点Pに作る磁場の大きさが  $dH = \frac{I \cos \theta}{4\pi L \cos \alpha} d\theta$  で表されることを示せ。ただし点Pからみた  $ds$  の微小角を  $d\theta$  とする。
- (3) BC間を流れる電流*I*が点Pに作る磁場の大きさ $H_{BC}$ を求めよ。

次に、図3に示す正*n*角形の形状の導線に電流*I*が流れているときに、正*n*角形の中心点Pに生じる磁場について考える。ここで正*n*角形の各頂点と中心点Pの間の長さを*L*とする。

- (4) 電流*I*は、図1の形状の導線を通る電流を  $\alpha = \pi/n$  として点Pを中心に*n*個重ね合わせたものと考えることができる。このことを用いて中心点Pに生じる磁場の大きさ $H_n$ を求めよ。
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n$  を求めよ。

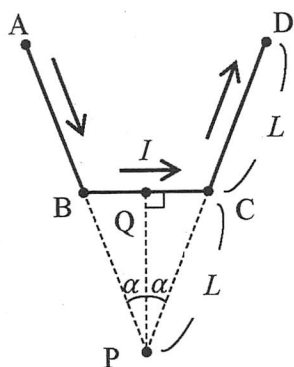


図1

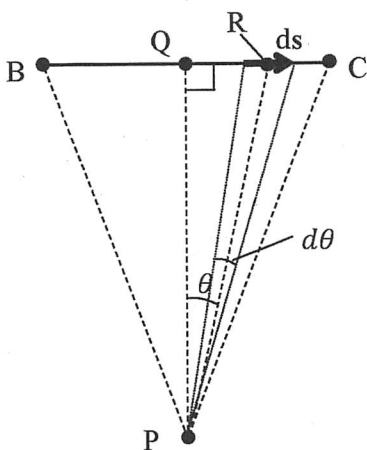


図2

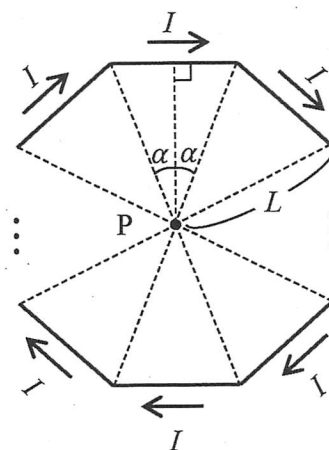


図3

[I-8]

図に示すように、平面波が誘電体1（誘電率 $\epsilon_1$ ，透磁率 $\mu_1$ ）中を $z$ 軸方向に伝搬し、誘電体2（誘電率 $\epsilon_2$ ，透磁率 $\mu_2$ ）に対して垂直に入射しているとする。ただし、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \mu_1$ および $\mu_2$ は正の値である。以下の問に答えよ。

(配点 25 点)

- (1) 誘電体1中の平面波の角周波数を $\omega_1$ ，波数を $k_1$ とし、電場を $\mathbf{E} = (0, E_0 \sin(k_1 z - \omega_1 t), 0)$ とすると、磁場 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ を求めよ。ここで、 $t$ は時間、 $E_0$ は実数とする。さらに、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ の大きさの比を求めよ。また、この値のことを一般に何と呼ぶか答えよ。
- (2) 誘電体1と誘電体2との境界において生じる反射波と透過波の、電場振幅ならびに磁場振幅を求めよ。また、電力反射率と電力透過率を求めよ。

次に誘電体2を導体に置き換える。以下の問に答えよ。

- (3) 導体が完全導体であるとしたとき、電力反射率と電力透過率を求めよ。
- (4) 導体が有限の導電率を有する良導体であるとしたとき、導体中での電磁場のふるまいを説明せよ。

