電子光科学　I

次の[I-1]から[I-6]の６問についてそれぞれ別の答案用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合は，「[I-1]（２枚目）」などのように明記せよ．

[I-1] 開区間 $(-1, 1)$ 上の関数 $y = \sin^{-1} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ を考える．次の問いに答えよ．
(配点 15 点)

(a) y' を求めよ．

(b) 次の関係式が成立することを示せ．

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 0$$

(c) 非負の整数 n に対して次の関係式が成立することを示せ．ただし，y の n 階導関数を $y^{(n)}$ と表す．

$$(1 - x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0$$

[I-2] n 次の正方行列

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$n \geq 2$ とする．(配点 15 点)

(a) A_n の行列式の値を求めよ．

(b) ３次行列 A_3 の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルはノルム１に規格化すること．

[I-3] 複素平面上の単位円周 $|z|=1$ を反時計回りに一周する経路を C とする．次の複素積分

$$\int_C \frac{\tan \pi z}{z^3} dz$$

を考える．（配点 15 点）

(a) C 内の被積分関数の極をすべて示せ．

(b) 留数の定理を用いて積分を計算せよ．

[I-4] $h(t)$のフーリエ変換を$H(f)$とするとき，$h\left(\frac{t}{a} - b\right)$のフーリエ変換を$H$を用いて表す式をフーリエ変換の定義より導出せよ．ただし，aとbは実数であり，$a \neq 0$とする．
(配点 15 点)

[I－5]

内径 a, 外径 b の誘電体円筒を考える．誘電体円筒の内側および外側の表面は十分薄い導体で覆われている．円筒の長さは内径，外径に比べて十分大きいとし，その上端，下端による影響は小さく無視できるものとする．誘電体の誘電率をε, 真空の誘電率および透磁率をそれぞれε_0, μ_0とし，円筒の中心軸からの距離を r とする．以下の問いに答えよ．　（配点 50 点）

(1) 図 1 に示すように，誘電体円筒の内側および外側の導体に z 軸方向の単位長さあたりそれぞれ$+\lambda$,$-\lambda$ の電荷が分布している場合を考える．

a) 誘電体円筒の内側，内部，外側における電場を求めよ．また，r に対する電場の大きさの変化の様子を図示せよ．

b) 誘電体円筒の内側，内部，外側における静電ポテンシャルを求めよ．また，r に対する静電ポテンシャルの変化の様子を図示せよ．ただし，無限遠における静電ポテンシャルをゼロとせよ．

c) 誘電体に蓄えられている全静電エネルギーU_e（z 軸方向単位長さあたり）を求めよ．

(2) 図 2 に示すように，z 軸に平行で一様な磁場（磁束密度 B）の中で，誘電体円筒が一定角速度ωで回転している場合を考える．誘電体および誘電体円筒の内側，外側の導体は帯電していなかったとする．誘電体の透磁率を μ_0 とする．

a) 距離 r ($a < r < b$) の点における電場および誘電分極を求めよ．

b) 内側および外側の導体の表面に誘起される電荷（ z 軸方向単位長さあたり）をそれぞれ求めよ．

c) 内側と外側の導体間に生じる起電力を求めよ．

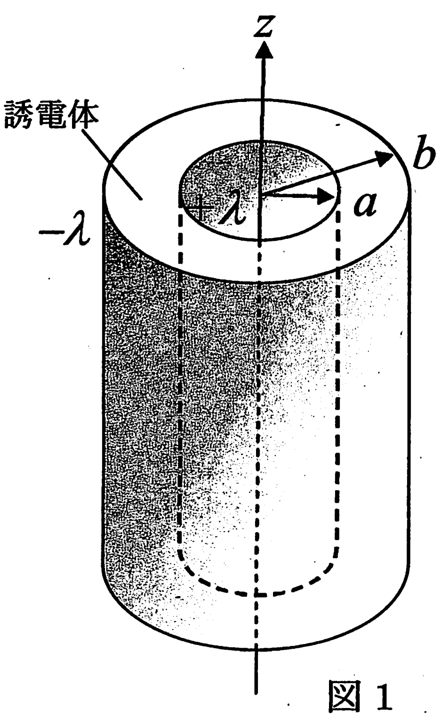

図 1

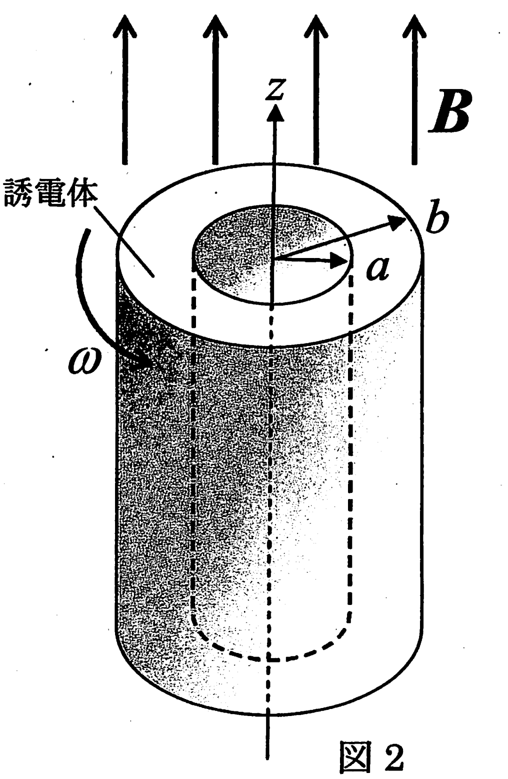

図 2

[I－6]
角周波数ωの平面電磁波の伝搬を考える．平面電磁波の電界は次式で表されるものとする．

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$$
$$E_x = E_0 \exp(j\omega t - \gamma z)$$

ここで，E_0 は複素振幅（定数），γは伝搬定数（$\gamma=\alpha+j\beta$, α, βは実数），jは虚数単位である．真空の誘電率および透磁率をそれぞれε_0, μ_0とする．以下の問いに答えよ．（配点 40 点）

(1) 平面電磁波が真空中を伝搬する場合を考える．

a) 磁界 $\mathbf{H}$ を $\mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ とする．マクスウェルの方程式から，H_x, H_y, H_z を，E_0を用いて表せ．

b) γは純虚数（$\alpha=0$）となることを示せ．また，平面電磁波の位相速度を求めよ．

(2) 次に，平面電磁波が誘電率ε，透磁率μ, 導電率σを持つ媒質中を伝搬する場合を考える．伝導電流の寄与は小さく，$(\sigma/\omega\varepsilon) \ll 1$ であるとする．

a) γとωの関係を示し，$(\sigma/\omega\varepsilon)$ の 1 次の項まで残した近似を用いて α, β を求めよ．

b) 誘電率 ε が次式のように角周波数 ω に依存するものとする．

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad (\omega > \omega_p,\ \omega_p \text{ は定数})$$

このときの平面電磁波の位相速度と群速度を求めよ．また，βとωの関係を図示せよ．