# 電子光科学　I

次の [I–1] から [I–6] までの６問についてそれぞれ別の答案用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合は，「[I–1]（２枚目)」などのように明記せよ．

[I–1]

以下の各問に答えよ．（配点 15 点）

(1) 次の不定積分を計算せよ．

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-r^2}}{n^2}$$

[I–2]

２次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = 2a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$ は変数変換 $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ により標準形 ${}^t\mathbf{y}D\mathbf{y}$ に変換できる．ここで，$A$ は３次の実対称行列，$T$ は３次の直交行列，$D$ は３次の対角行列，$\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ は実ベクトルである．以下の各問に答えよ．（配点 20 点）

(1) 行列 $A$ を求めよ．

(2) 行列 $D$ を $A$ と $T$ を用いて表せ．

(3) 標準形を求めよ．

[I−3]

以下の積分を計算せよ．ただし，$z$ は複素数，$C$ は複素平面上の単位円周 $|z|=1$ を反時計回りに一周する経路である．（配点 20 点）

(1) $\int_C \frac{dz}{\exp(z)-1}$

(2) $\int_C \frac{dz}{(\exp(z)-1)^2}$

(3) $\int_C z\exp(\frac{1}{z})dz$

[I-4]

生起確率 $p$ の事象が起こったことを知ったときに得られる情報量は $p$ の単調減少関数 $I(p)$ であるとする．また，事象 $A$ と事象 $B$ は互いに独立とする．以下の各問に答えよ．

（配点 20 点）

(1) 事象 $A$ と事象 $B$ の生起確率をそれぞれ $p_A, p_B$ とするとき，積事象 $A\cap B$ の生起確率 $p_{A\cap B}$ を求めよ．

(2) $I(p_{A\cap B})$, $I(p_A)$, $I(p_B)$ の関係を書け．

(3) 問 (1), (2) から $I(p)$ の満たすべき微分方程式を導出せよ．

(4) 問 (3) の微分方程式を解いて $I(p)$ を求めよ．ただし，$I(\frac{1}{2})=1$ とする．

[I–5]

下図に示すように，十分に広い接地された平板導体の表面から距離 $a$ の位置に点電荷 $q$（$q>0$）がある．導体上の空間は真空（誘電率 $\varepsilon_0$）であるとし，図のように導体表面を $z=0$ として $xyz$ 座標を定める．以下の各問に答えよ．（配点 35 点）

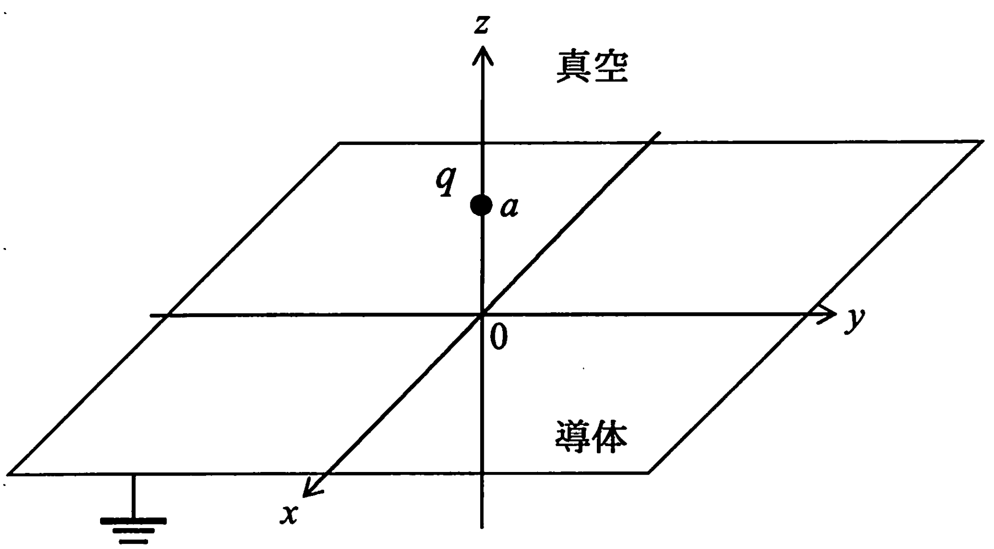
(1) $z \geqq 0$ の領域における静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ の領域における電場 $\mathbf{E}(x, y, z)$ を求めよ．

(3) $yz$ 面における電気力線の概形を示せ．

(4) 導体表面の点 $(x, y, 0)$ における表面電荷密度 $\sigma(x, y, 0)$ を求めよ．

(5) 点電荷 $q$ が z 軸の正の方向に一定速度 $v$ で運動する時，導体表面の点 $(x, y, 0)$ に生じる変位電流密度 $J_d(x, y, 0)$ を求めよ．ただし，$v$ は光速に比べて十分小さいものとする．



[I–6]

真空中（誘電率 $\varepsilon_0$, 透磁率 $\mu_0$）を $z$ 軸の正方向に伝わる平面電磁波の電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は，$z$ と時間 $t$ の関数として表される．電磁波の角周波数を $\omega$（$\omega$>0），波数を $k$（$k$>0）として，電場 $\mathbf{E}$ を

$$\mathbf{E}(z,t) = (E_x, 0, 0)$$

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \qquad (E_0 > 0)$$

と表すとき，以下の各問に答えよ．（配点 40 点）

(1) $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ が直交することを示せ．

(2) $\mathbf{B}$ を求めよ．

(3) 電磁波の位相速度を導出せよ．

(4) 電磁波のポインチングベクトルの大きさと向きを求めよ．

上記の電磁波に加えて，次式で表される電磁波を考える．

$$\mathbf{E}_a(z,t) = (0, E_y, 0)$$

$$E_y = E_1 \sin(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (E_1 > 0)$$

(5) これら 2 つの電磁波を合成した波の電場ベクトルの先端は，どのような軌跡を描くか図示して説明せよ．